



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κανονική εξέταση στο μάθημα ΦΥΣΙΚΗ Ι 20 Φεβρουαρίου 2003

Διδάσκοντες: Α. Απέκης, Ρ. Βλαστού, Κ. Χριστοδουλίδης

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες. Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Θέμα 1. Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο δυνάμεων και η θέση του δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = \alpha \cos \omega t \hat{x} + \beta \sin \omega t \hat{y}$$

όπου α , β και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

- (α) Ποια είναι η εξίσωση $f(x, y)$ της τροχιάς που διαγράφει το σώμα;
(β) Να υπολογίσετε την ορμή του σώματος, \vec{p} , και τη στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων, \vec{L} .
(γ) Να βρείτε τη δύναμη \vec{F} που ασκείται πάνω στο σώμα και να αποδείξετε ότι αυτή είναι μια κεντρική δύναμη. Επιβεβαιώστε ότι είναι $\vec{r} \times \vec{F} = \mathbf{0}$, υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο. Είναι αυτό το αποτέλεσμα συμβατό με την τιμή του \vec{L} που βρέθηκε στο ερώτημα (β);

Θέμα 2. Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ μπορεί να κινηθεί σε όλο το μήκος του άξονα των x , ($-\infty < x < \infty$). Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση

$$U(x) = (x^2 - 1)^2 \quad (\text{σε μονάδες S.I.}).$$

- (α) Να σχεδιαστεί η $U(x)$ και να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος και το είδος της ισορροπίας στο καθένα.
(β) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα και να βρεθεί πού αυτή είναι μηδενική. Για σημεία με $x > 0$, πού είναι ελκτική και πού απωστική η δύναμη ως προς την αρχή $x = 0$;
(γ) Το σώμα αφήνεται ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα από τη θέση $x = -2 \text{ m}$. Να περιγραφεί ποιοτικά η κίνηση που θα ακολουθήσει και να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης.
(δ) Αν το σώμα αρχικά ισορροπεί στο σημείο $x = -1 \text{ m}$, ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί για να μπορέσει να φθάσει στο σημείο $x = 1 \text{ m}$;

Θέμα 3. Λεπτή ράβδος μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο, ο οποίος περνάει από το ένα της άκρο, Ο. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) που δίνεται από τη σχέση

$$\lambda(x) = \frac{2m}{3l} \left(1 + \frac{x}{l} \right)$$

όπου x είναι η απόσταση από το άκρο Ο.

- (α) Δείξτε ότι η συνολική μάζα της ράβδου είναι ίση με m , το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο σημείο $x_c = \frac{5}{9}l$ και η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I_O = \frac{7}{18}ml^2$.

⇒ ⇒ ⇒

(β) Η ράβδος εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας απόκλισης θ της ράβδου από την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το άκρο O. Δείξτε ότι, για μικρές τιμές της γωνίας θ , η ταλάντωση είναι απλή αρμονική και βρείτε τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

Θέμα 4. Στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου, ένα φωτόνιο ενέργειας E_γ συγκρούεται με έναν ακίνητο πυρήνα μάζας ηρεμίας M_0 . Το φωτόνιο απορροφάται πλήρως από τον πυρήνα.

(α) Να βρείτε την ταχύτητα, v_1 , και τη μάζα, M_1 , του σώματος που προκύπτει.

(β) Να δείξετε ότι στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου, η ταχύτητα V του κέντρου μάζας του συστήματος φωτονίου-πυρήνα πριν από τη σύγκρουση είναι

$$V = c \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_0 c^2}.$$

(γ) Να βρείτε τις ενέργειες του φωτονίου, E_γ^C , και του πυρήνα, E^C , στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Γενικό Τυπολόγιο

$$\vec{L} = M \vec{r} \times \vec{v} \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

Σχετικιστική Κινηματική:

Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα V ως προς ένα σύστημα αναφοράς S , τότε:

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \quad \beta \equiv \frac{V}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Delta l = \Delta l_0 / \gamma \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}.$$

Φαινόμενο Doppler: $f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$ f, f_0 : συχνότητες

Σχετικιστική Δυναμική:

$$m_0 = m(0) \quad p = \gamma m_0 v \quad E = \gamma m_0 c^2 \quad m = m(v) = \gamma m_0 \quad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad E' = \gamma(E - c\beta p_x)$$

Για φωτόνια: $E = pc \quad E = hf$